

La Suma de GAUSS

1 La experiencia de Gauss

En este apartado, explicamos una experiencia de uno de los más grandes matemáticos de la historia de la humanidad: *Carl Friedrich Gauss*.

Gauss es considerado por muchos matemáticos como uno de los más grandes matemáticos de la historia. Nació en Alemania, y realizó sus estudios de nivel básico como cualquier otro estudiante. Para dar una muestra de su talento matemático, aquí se presenta una vivencia que se cuenta de él, cuando tenía 8 años.

Un día Gauss fue a la escuela. Su maestra (guapa como todas las maestras de segundo de primaria) tenía a su novio, que muy pocas veces veía, debido a que vivían en poblados distintos. Un día el novio de la maestra fue a visitarla, y a ella se le hizo fácil entretener a sus estudiantes poniéndoles una tarea muy sencilla, pero bastante laboriosa: sumar todos los números del 1 al 100.

Tan pronto como les dijeron, todos los niños del salón empezaron a sumar, pero a Gauss se le hizo demasiado aburrido recorrer todo el camino “a pie”, así que utilizó ciertas propiedades de los números enteros para terminar más rápido haciendo menos esfuerzo. Veamos qué hizo Gauss.

Seguramente pensó: Bueno, esta maestra floja quiere andar noviendo, así que nos deja de tarea algo que ella misma considera laborioso, pero le daré una pequeña sorpresa.

Ella nos pide que sumemos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$$

Pero es evidente que la suma anterior es igual a:

$$100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \dots + 2 + 1$$

porque si fueran grupos de manzanas que estuviéramos colocando dentro del salón, entonces no importaría por cual grupo de manzanas empezara metiendo, al final de cuentas tendré el mismo número de manzanas, si es que se meten todos los grupos.

Regresando a las sumas que nos pide la maestra, si sumo ambos renglones, tendré dos veces la suma que la maestra nos pide. Veamos si eso ayuda.

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 \\ S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2S = 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 \end{array}$$

Aquí veo luego, luego que el 101 se repite cien veces. Entonces la suma del último renglón debe ser 100 por 101, esto es, 10 100 (recuerda el truco de multiplicar por cien, solamente agrega dos ceros a la derecha). Este número es el doble de la suma que nos pidió la maestra, así que, si divido 10100 entre dos tengo la suma que estoy buscando. Entonces la suma debe ser 5050. La maestra quiere ver en la libreta:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100 = 5050$$

Listo!

Desde luego, nuestro amigo Gauss realizó esto más rápido de lo que su maestra esperaba, que ella se sorprendió cuando Gauss levantó su pizarra para ponerla en su escritorio y decir “ya está”. Para sorpresa de la maestra Gauss era el único que tenía el resultado correcto.

2 Generalización

Ahora, en caso de que quieras sumar:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Porque, utilizando el método de Gauss, obtenemos:

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + \dots + n - 1 + n \\ S = n + n - 1 + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \end{array}$$

Observa que estamos sumando el número $n + 1$ un total de n veces, de aquí que: $2S = n(n + 1)$, y

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Moraleja: Lo que parece difícil se hace fácil si te decides a pensar en resolver el problema que tienes enfrente.

Como se puede ver, conocer unas pocas propiedades de las cosas que estemos operando, y aplicarlas a un problema específico, ayuda bastante a reducir el esfuerzo que se supone necesario para resolverlo sin aplicar tales propiedades.

Para eso sirven las matemáticas..., aunque muchas de las veces, no nos demos cuenta; o peor aún, parezca lo contrario.

Profr. Efraín Soto Apolinar.

P.D. ¿Puedes mencionar las propiedades de los números que utilizó Gauss para resolver su tarea?